Électromagnétisme – Chapitre 5

Propagation des ondes

I. Rappels sur les différents types d'ondes . . . 1
I.1. Onde sphérique et onde plane . . . 1
I.2. Onde plane progressive . . . 2
I.3. Onde plane progressive monochromatique . . . 2
I.4. Onde plane stationnaire . . . 3
II. Équation de d'Alembert . . . 4
II.1. Exemple de la propagation d'une onde le long d'une corde . . . 4
II.2. Généralisation . . . 4
II.3. Solution générale en ondes planes progressives . . . 5
II.4. Cas d'une onde plane progressive monochromatique . . . 5
II.5. Cas d'une onde plane stationnaire . . . 6

Afin de préparer l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques, nous allons rappeler dans ce chapitre les caractéristiques des différents types d'ondes rencontrées en physique, et présenter l'équation de d'Alembert qui régit de nombreux phénomènes de propagation.

On commence par rappeler la définition d'une **onde** : il s'agit d'un phénomène de propagation d'une perturbation d'une grandeur physique $s(M,t)$ sans transport de matière.

I. Rappels sur les différents types d'ondes

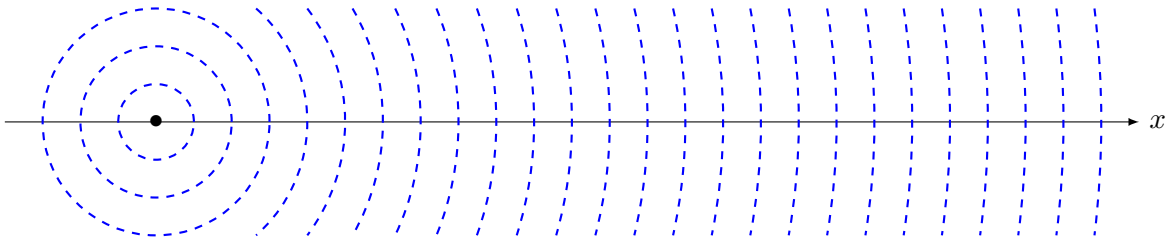
I.1. Onde sphérique et onde plane

On rappelle qu'une **surface d'onde** est une surface continue de l'espace sur laquelle la grandeur physique $s(M,t)$ est uniforme à chaque instant.

On distingue principalement deux types d'ondes :

- les **ondes sphériques** pour lesquelles les surfaces d'ondes sont des sphères concentriques ;
- les **ondes planes** pour lesquelles les surfaces d'ondes sont des plans parallèles.

Dans un milieu isotrope, une source ponctuelle émet des ondes sphériques, comme représenté ci-dessous. À grande distance de la source, la courbure des surfaces d'onde devient négligeable, on peut alors considérer qu'il s'agit d'une onde plane.



Comme une onde plane $s(M,t)$ est uniforme dans un plan, il est possible d'exprimer son évolution dans l'espace en fonction d'une seule coordonnée cartésienne. Par exemple, une onde plane dont les surfaces d'ondes sont perpendiculaires à l'axe (Ox) s'exprime de la forme :

$$s(M,t) = s(x,t).$$

I.2. Onde plane progressive

Une **onde plane progressive** est une onde plane qui se propage dans une certaine direction sans se déformer.

On peut donner quelques exemples d'ondes planes progressives : la houle qui se propage à la surface de la mer, une onde de compression qui se propage le long d'un ressort...

- Une onde plane progressive qui se propage dans le sens des x croissants peut s'exprimer de la forme :

$$s(M,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = f_1\left(u_1\right)$$

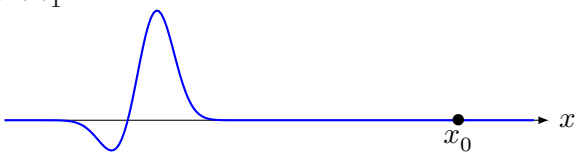
  avec f_1 une fonction de la variable $u_1 = t - \dfrac{x}{v}$, et v la vitesse de l'onde.
- Une onde plane progressive qui se propage dans le sens des x décroissants peut s'exprimer de la forme :

$$s(M,t) = f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = f_2\left(u_2\right)$$

  avec f_2 une fonction de la variable $u_2 = t + \dfrac{x}{v}$, et v la vitesse de l'onde.

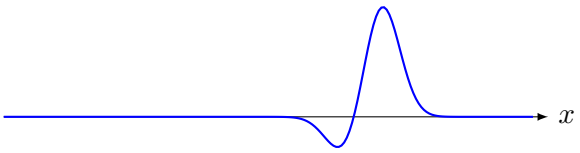
Application :

On représente ci-dessous l'allure d'une corde sur laquelle se propage une onde plane progressive dans le sens des x croissants à l'instant t_1.

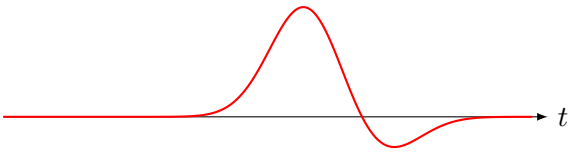


Allure à l'instant t_1

Représentons l'allure de la corde à un instant $t_2 > t_1$, et celle du chronogramme enregistré par un capteur situé à la position x_0.



Allure à l'instant t_2



Chronogramme à la position x_0

I.3. Onde plane progressive monochromatique

Une **onde plane progressive monochromatique** (OPPM), aussi appelée onde plane progressive harmonique (OPPH), est une onde plane progressive dont le spectre ne présente qu'une seule fréquence.

- Une OPPM qui se propage dans le sens des x croissants peut s'exprimer de la forme :

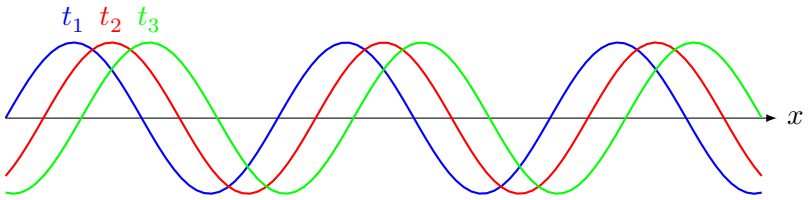
$$s(M,t) = s_0 \cos\left(\omega\, t - k\, x + \varphi\right)$$

  avec s_0 son amplitude, ω sa pulsation, k son vecteur d'onde et φ sa phase à l'origine.
- Une OPPM qui se propage dans le sens des x décroissants peut s'exprimer de la forme :

$$s(M,t) = s_0 \cos\left(\omega\, t + k\, x + \varphi\right)$$

  avec s_0 son amplitude, ω sa pulsation, k son vecteur d'onde et φ sa phase à l'origine.

On représente ci-dessous l'allure d'une corde sur laquelle se propage une OPPM dans le sens des x croissants à différents instants successifs.



Une OPPM présente une double périodicité :

- une **périodicité temporelle**, qui correspond aux oscillations à une position donnée, de période :

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

- une **périodicité spatiale**, qui correspond aux oscillations à un instant donné, de longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{k}.$$

Une OPPM est simple à étudier mathématiquement, mais elle ne peut pas décrire de façon réaliste un phénomène physique observé dans la nature, car celle-ci présente une taille infinie et se propage sur un temps infini sans jamais s'atténuer. Cependant, comme l'analyse de Fourier permet de montrer que toute onde plane progressive peut s'écrire comme une superposition d'OPPM, l'étude des OPPM peut alors être transposée aux ondes planes progressives observées dans la nature par superposition.

I.4. Onde plane stationnaire

Une **onde plane stationnaire** est une superposition de plusieurs ondes planes progressives qui se propagent dans des sens opposés, et dont la résultante oscille sans se propager. Elle présente alors un découplage entre l'espace et le temps.

Par exemple, une onde plane stationnaire dont les surfaces d'ondes sont perpendiculaires à l'axe (Ox) peut s'exprimer de la forme :

$$s(M,t) = f(x) \times g(t)$$

avec f et g des fonctions.

Application :

On considère une onde plane stationnaire de la forme :

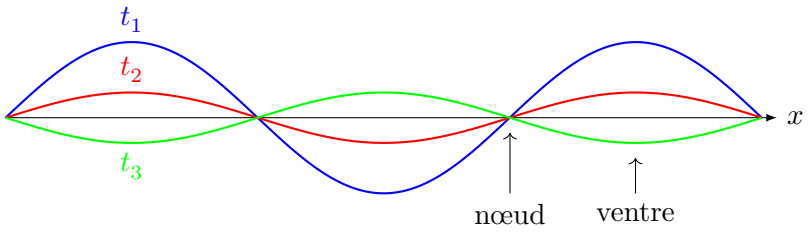
$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega\,t + \varphi_1) \cos(k\,x + \varphi_2)\,.$$

Montrons que cette onde peut s'exprimer comme la superposition de deux OPPM, et donnons les caractéristiques de ces deux OPPM.

À l'aide de la relation $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$, on peut exprimer : $s(x,t) = \dfrac{s_0}{2}\cos(\omega\,t - k\,x + \varphi_1 - \varphi_2) + \dfrac{s_0}{2}\cos(\omega\,t + k\,x + \varphi_1 + \varphi_2)$, ce qui correspond bien à la superposition de deux OPPM :

- une OPPM d'amplitude $\dfrac{s_0}{2}$ et de phase à l'origine $\varphi_1 - \varphi_2$ qui se propage dans le sens des x croissants ;
- une OPPM d'amplitude $\dfrac{s_0}{2}$ et de phase à l'origine $\varphi_1 + \varphi_2$ qui se propage dans le sens des x décroissants.

Les ondes observées le long d'une corde de Melde excitée de façon sinusoïdale sont des exemples d'ondes planes stationnaires. On représente ci-dessous l'allure d'une telle corde à différents instants successifs.



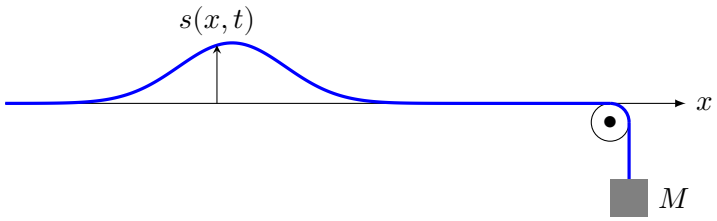
On observe le long de la corde :

- des **nœuds** de vibration, où l'amplitude des oscillations est nulle ;
- des **ventres** de vibration, où l'amplitude des oscillations est maximale.

II. Équation de d'Alembert

II.1. Exemple de la propagation d'une onde le long d'une corde

On considère une corde tendue de masse linéique μ, initialement au repos le long de l'axe horizontal (Ox). L'une des extrémités est reliée à une masse M par l'intermédiaire d'une poulie, ce qui génère une tension $T = M\,g$ dans la corde. Suite à une légère perturbation, une onde se propage le long de la corde, et on note $s(x,t)$ le déplacement vertical du point d'abscisse x de la corde à l'instant t, comme représenté ci-dessous.



Une modélisation de ce problème permet de montrer que le déplacement $s(x,t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

qui peut s'écrire sous la forme de l'**équation de d'Alembert unidimensionnelle** :

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$

avec $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ la vitesse de propagation des ondes le long de la corde.

II.2. Généralisation

La propagation de nombreuses ondes rencontrées en physique est régie par l'équation de d'Alembert (ondes acoustiques, ondes électromagnétiques...). En généralisant le résultat précédent aux trois dimensions de l'espace à l'aide de l'opérateur laplacien, on peut exprimer l'**équation de d'Alembert** :

$$\boxed{\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$

avec v la vitesse de propagation des ondes.

II.3. Solution générale en ondes planes progressives

On peut montrer que la solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes progressives qui se propagent dans des sens opposés, soit :

$$s(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

avec f_1 et f_2 des fonctions.

Application :

Vérifions qu'une onde plane progressive de la forme :

$$s(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = f_1(u_1)$$

avec $u_1 = t - \dfrac{x}{v}$, est bien une solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.

On peut exprimer :

- $\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}$, avec $\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = -\dfrac{1}{v}$, soit : $\dfrac{\partial s}{\partial x} = -\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}$;
- $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\right) = -\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\right) = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2}$;
- $\dfrac{\partial s}{\partial t} = \dfrac{\partial f_1}{\partial t} = \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}$, avec $\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = 1$, soit : $\dfrac{\partial s}{\partial t} = \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}$;
- $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\right) = \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\right) = \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2}$.

On obtient finalement : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} = 0$, donc $s(x,t)$ est bien une solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.

II.4. Cas d'une onde plane progressive monochromatique

On considère le cas d'une OPPM de la forme :

$$s(x,t) = s_0 \cos\left(\omega\, t - k\, x + \varphi\right).$$

Comme cette onde est une solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle, nous pouvons établir une relation entre ses deux périodicités.

En effet, on peut exprimer :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2\, s_0 \cos\left(\omega\, t - k\, x + \varphi\right) = -k^2\, s(x,t)$$

et :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2\, s_0 \cos\left(\omega\, t - k\, x + \varphi\right) = -\omega^2\, s(x,t)$$

l'équation de d'Alembert donne alors :

$$-k^2\, s(x,t) - \frac{1}{v^2}\left[-\omega^2\, s(x,t)\right] = 0$$

d'où on en déduit l'expression de la vitesse de l'onde :

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}}$$

il s'agit de la **relation de dispersion** d'une OPPM, elle relie ses deux périodicités à la vitesse de l'onde.

Comme l'équation de d'Alembert est linéaire, on peut également associer à cette OPPM une onde complexe de la forme : $\underline{s}(x,t) = \underline{s}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k x)}$, avec $\underline{s}_0 = s_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$ l'amplitude complexe. En utilisant l'équation de d'Alembert, on retrouve alors la relation de dispersion précédente.

II.5. Cas d'une onde plane stationnaire

On considère le cas d'une onde plane stationnaire de la forme :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(k x + \varphi_2)\,.$$

Comme nous avons montré précédemment que cette onde peut s'exprimer comme la superposition de deux OPPM, elle est également une solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle, et nous pouvons alors établir une relation entre ses deux périodicités.

En effet, on peut exprimer :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2\, s_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(k x + \varphi_2) = -k^2\, s(x,t)$$

et :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2\, s_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(k x + \varphi_2) = -\omega^2\, s(x,t)$$

l'équation de d'Alembert donne alors :

$$-k^2\, s(x,t) - \frac{1}{v^2}\left[-\omega^2\, s(x,t)\right] = 0$$

et on retrouve la **relation de dispersion** obtenue précédemment dans le cas d'une OPPM :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}.$$